Zadanie 1: Schemat Hornera

Należy zapisać wielomian $W(x) = -x^7 - 0,3x^5 + 0,2x^4 - x^3 + 3x^2 + x + 4$ w postaci zagnieżdżonej (metoda Hornera), co minimalizuje liczbę mnożeń.

Rozwiązanie:

$$W(x) = ((((((-1 \cdot x + 0) \cdot x - 0,3) \cdot x + 0,2) \cdot x - 1) \cdot x + 3) \cdot x + 1) \cdot x + 4$$

Zadanie 2 dotyczy **interpolacji wielomianowej metodą Newtona**. Jest to sposób na znalezienie wzoru funkcji (wielomianu), która przechodzi dokładnie przez zadane punkty.

W Twoim zadaniu mamy punkty:

- $A = (3, 0)$
- $B = (4, 2)$
- $C = (6, 4)$
- $D = (7, 2)$

Oto krok po kroku, jak się to liczy:

1. Budowa tabeli ilorazów różnicowych

Metoda Newtona opiera się na tzw. **ilorazach różnicowych.** Zamiast rozwiązywać skomplikowany układ równań, budujemy tabelę, w której kolejne wartości wynikają z poprzednich.

- **I rząd:** Obliczamy zmianę wartości y względem x dla sąsiednich punktów.
  - Dla punktów A i B: $f[x_0, x_1] = \frac{2-0}{4-3} = \mathbf{2}$
  - Dla punktów B i C: $f[x_1, x_2] = \frac{4-2}{6-4} = 1$
  - Dla punktów C i D: $f[x_2, x_3] = \frac{2-4}{7-6} = -2$
- **II rząd:** Obliczamy "różnicę z różnic" (dzielimy przez różnicę x oddalonych o 2 pozycje).
  - $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1-2}{6-3} = \mathbf{-0,333}$
  - $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-2-1}{7-4} = -1$
- **III rząd:** Ostatni krok (dzielimy przez różnicę x oddalonych o 3 pozycje, czyli $7 - 3$).
  - $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-1-(-0,333)}{7-3} = \mathbf{-0,167}$

Jacobi

2. Wyznaczenie współczynników

W metodzie Newtona współczynnikami wielomianu są **pierwsze wartości z każdego rzędu** (w tabeli idą one po "skosie" od góry). W naszym przypadku są to:

- $a_0 = 0$
- $a_1 = 2$
- $a_2 = -0,333$
- $a_3 = -0,167$

3. Zapisanie wzoru (Postać Newtona)

Wzór wielomianu Newtona ma specyficzną strukturę:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Podstawiając nasze dane ($x_0 = 3, x_1 = 4, x_2 = 6$):

$$P(x) = 0 + 2(x - 3) - 0,333(x - 3)(x - 4) - 0,167(x - 3)(x - 4)(x - 6)$$

Zadanie 3: Metoda trapezów

Obliczyć $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$ dla $n = 4$.
Krok $h = \frac{2-0}{4} = 0,5$. Punkty: $x \in \{0; 0,5; 1; 1,5; 2\}$.

1. $f(0) = 0$
2. $f(0,5) = \frac{0,5}{\sqrt{1,5}} \approx 0,4082$
3. $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071$
4. $f(1,5) = \frac{1,5}{\sqrt{2,5}} \approx 0,9487$
5. $f(2) = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,1547$

Wzór: $I \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) + f(x_4)]$

$$I \approx \frac{0,5}{2}[0 + 2(0,4082 + 0,7071 + 0,9487) + 1,1547] \approx 0,25[4,128 + 1,1547] \approx \mathbf{1,3}$$

Jacobi

$$\begin{cases} x + 6y + z = 9 & \Rightarrow x = 9 - 6y - z \\ -2x + 4y + 10z = 4 & \Rightarrow y = \frac{1}{4}(4 + 2x - 10z) \\ 4x - y + z = 4 & \Rightarrow z = 4 - 4x + y \end{cases}$$

$x=0;\ y=0;\ z=0$

Itr1:

$x = 9 - 6\cdot 0 - 0 = 9$

$y = \frac{1}{4}(4 + 2\cdot 0 - 10\cdot 0) = 1$

$z = 4 - 4\cdot 0 + 0 = 4$

Itr2:

$x = 9 - 6\cdot 1 - 4 = -1$

$y = \frac{1}{4}(4 + 2\cdot 9 - 10\cdot 4) = -\frac{18}{4}$

$z = 4 - 4\cdot 9 + 1 = -31$

Krok 1: Zamiana wierszy (opcjonalna, ale ułatwia życie)

Najwygodniej pracuje się, gdy w pierwszym wierszu na pierwszej pozycji mamy 1. Zamieńmy wiersz pierwszy (W_1) z trzecim (W_3):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

Krok 2: Zerowanie pierwszej kolumny pod przekątną

Wykonujemy operacje: $W_2 - 2 \cdot W_1$ oraz $W_3 - 3 \cdot W_1$:

- Dla W_2: $[2-2, 1-2, 3-2, |7-8] \rightarrow [0, -1, 1, |-1]$
- Dla W_3: $[3-3, 1-3, 6-3, |2-12] \rightarrow [0, -2, 3, |-10]$

Macierz wygląda teraz tak:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -10 \end{array}\right]$$

Krok 3: Zerowanie drugiej kolumny pod przekątną

Musimy wyzerować element -2 w trzecim wierszu. Wykonujemy operację: $W_3 - 2 \cdot W_2$:

- Dla W_3: $[0-0, -2-(-2), 3-2, | -10-(-2)] \to [0, 0, 1, | -8]$

Otrzymujemy postać trójkątną:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right]$$

Krok 4: Rozwiązanie układu (podstawianie wstecz)

Teraz odczytujemy równania od dołu:

1. Z W_3: $1 \cdot z = -8 \Rightarrow \mathbf{z = -8}$
2. Z W_2: $-1 \cdot y + z = -1 \Rightarrow -y - 8 = -1 \Rightarrow -y = 7 \Rightarrow \mathbf{y = -7}$
3. Z W_1: $x + y + z = 4 \Rightarrow x - 7 - 8 = 4 \Rightarrow x - 15 = 4 \Rightarrow \mathbf{x = 19}$

Jak wyznaczyć wersję zmiennopozycyjną danej liczby?

Krok 1: Wyznaczenie cechy (c)

Cecha to po prostu liczba miejsc, o które musisz przesunąć przecinek w zapisie binarnym, aby przed przecinkiem zostało **zero**, a zaraz po nim **pierwsza jedynka**.

1. Zapisz liczbę binarnie: $24,5_{10} = \mathbf{11000,1}_2$
2. Przesuwaj przecinek w lewo, aż uzyskasz postać $0,1...$:
   - $1100,01$ (1 miejsce)
   - $110,001$ (2 miejsca)
   - $11,0001$ (3 miejsca)
   - $1,10001$ (4 miejsca)
   - $0,110001$ **(5 miejsc)** $\leftarrow$ to jest nasza postać $m \in [0,5;1)$
3. Liczba przesunięć to Twoja cecha: $c = 5$.

.

Krok 2: Zapisanie cechy jako sumy potęg dwójki

W zadaniach tego typu (jak na slajdzie) cechę rozbijasz na składniki binarne: $4, 2, 1...$

- Dla $c = 5$: to jest $4 + 1$, czyli:
  $(1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)$

Krok 3: Rozpisanie mantysy (m) na ułamki

Mantysa to to, co zostało po przecinku w znormalizowanej liczbie $(0, 110001)$. Każda pozycja po przecinku ma swoją wagę (kolejne potęgi ujemne 2):

Bit po przecinku	1	1	0
Waga	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}

Eksportuj do Arkuszy

Zapisujesz tylko te składniki, gdzie występuje jedynka:
$(1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6})$

.

Krok 4: Złożenie całości do wzoru

Teraz podstawiasz wszystko do schematu $x = s \cdot 2^c \cdot m$:

$$24,5 = 1 \cdot 2^{(1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)} \cdot (1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6})$$

Szybka metoda "na skróty":

1. Znajdź największą potęgę dwójki mieszczącą się w liczbie (dla $24, 5$ jest to $2^4 = 16$).
2. Twoja cecha c będzie o **1 większa** niż ten wykładnik ($4 + 1 = 5$).
3. Mantysę uzyskasz, dzieląc liczbę przez 2^c (czyli $24, 5/32 = 0, 765625$) i zamieniając ten ułamek na postać binarną.

Czy chcesz, żebym sprawdził, czy uda Ci się teraz samodzielnie rozpisać liczbę $10, 5$?

.

Zadanie 2: Metoda Simpsona ($n = 4$)

Obliczamy całkę $\int_0^2 3\sqrt{x}\,dx$. Krok $h = \frac{2-0}{4} = 0,5$.
Węzły: $x_0 = 0, x_1 = 0,5, x_2 = 1, x_3 = 1,5, x_4 = 2$.

Wartości funkcji $f(x) = 3\sqrt{x}$:

- $f(0) = 0$
- $f(0,5) = 3\sqrt{0,5} \approx 2,1213$
- $f(1) = 3$
- $f(1,5) = 3\sqrt{1,5} \approx 3,6742$
- $f(2) = 3\sqrt{2} \approx 4,2426$

Wzór Simpsona: $I \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$

$$I \approx \frac{0,5}{3}[0 + 4(2,1213) + 2(3) + 4(3,6742) + 4,2426] \approx 0,1667[8,4852 + 6 + 14,69$$

$$I \approx 0,1667 \cdot 33,4246 \approx \mathbf{5,571}$$

.

W zadaniu z Twojego arkusza (zadanie nr 2) pojawia się istotny szczegół: masz wyznaczyć **minimum** funkcji $f(x) = (x-8)^2$ za pomocą metody bisekcji.

Standardowo bisekcja służy do szukania miejsc zerowych ($f(x) = 0$). Aby znaleźć minimum, musimy szukać miejsca zerowego **pochodnej** tej funkcji, czyli rozwiązać równanie $f'(x) = 0$.

Krok 0: Przygotowanie pochodnej

$$f(x) = (x-8)^2$$

$$f'(x) = 2(x-8) = 2x - 16$$

Szukamy punktu, w którym $f'(x) = 0$ w przedziale $[a, b] = [4, 16]$.

Iteracja 1

1. **Środek przedziału:** $x_1 = \frac{4+16}{2} = \mathbf{10}$
2. **Wartość pochodnej:** $f'(10) = 2(10-8) = 4$

.

3. **Znak na końcach:**
    - $f'(4) = 2(4 - 8) = -8$ (znak ujemny)
    - $f'(10) = 4$ (znak dodatni)
4. **Decyzja:** Znak zmienia się w lewej połowie. Nowy przedział to $[4, 10]$.

Iteracja 2

1. **Środek przedziału:** $x_2 = \frac{4+10}{2} = \mathbf{7}$
2. **Wartość pochodnej:** $f'(7) = 2(7 - 8) = -2$
3. **Znak na końcach:**
    - $f'(7) = -2$ (znak ujemny)
    - $f'(10) = 4$ (znak dodatni)
4. **Decyzja:** Znak zmienia się w prawej połowie. Nowy przedział to $[7, 10]$.

.

Iteracja 3

1. **Środek przedziału:** $x_3 = \frac{7+10}{2} = \mathbf{8,5}$
2. **Wartość pochodnej:** $f'(8,5) = 2(8,5 - 8) = 1$
3. **Znak na końcach:**
    - $f'(7) = -2$ (znak ujemny)
    - $f'(8,5) = 1$ (znak dodatni)
4. **Decyzja:** Znak zmienia się w lewej połowie. Nowy przedział to $[7; 8,5]$.

.

Wyznacz wielomian interpolarny Lagrange'a dla węzłów: (2,0), (4,1), (6,4)

Aby wyznaczyć wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla podanych węzłów, skorzystamy ze wzoru ogólnego, który pozwala zbudować funkcję przechodzącą dokładnie przez te punkty.

Dane węzły:

- $(x_0, y_0) = (2, 0)$
- $(x_1, y_1) = (4, 1)$
- $(x_2, y_2) = (6, 4)$

---

1. Wzór ogólny

Wielomian Lagrange'a ma postać sumy iloczynów wartości y oraz wielomianów bazowych $L_i(x)$:

$$P(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x)$$

Ponieważ $y_0 = 0$, pierwszy człon równania wyzeruje się ($0 \cdot L_0(x) = 0$), więc musimy obliczyć tylko bazy dla L_1 oraz L_2.

.

2. Wyznaczenie wielomianów bazowych $L_i(x)$

Wzór na bazę polega na odejmowaniu od x wszystkich pozostałych iksów w liczniku, a w mianowniku robimy to samo, podstawiając pod x wartość iksa danego węzła.

Baza $L_1(x)$ (dla $x_1 = 4$):

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x-2)(x-6)}{(4-2)(4-6)} = \frac{x^2 - 8x + 12}{2 \cdot (-2)} = \frac{x^2 - 8x + 12}{-4}$$

$$L_1(x) = -0,25x^2 + 2x - 3$$

Baza $L_2(x)$ (dla $x_2 = 6$):

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(6-2)(6-4)} = \frac{x^2 - 6x + 8}{4 \cdot 2} = \frac{x^2 - 6x + 8}{8}$$

$$L_2(x) = 0,125x^2 - 0,75x + 1$$

.

3. Złożenie wielomianu $P(x)$

Podstawiamy wyliczone bazy oraz wartości $y_1 = 1$ i $y_2 = 4$ do wzoru:

$$P(x) = 1 \cdot (-0,25x^2 + 2x - 3) + 4 \cdot (0,125x^2 - 0,75x + 1)$$

Teraz wymnażamy i porządkujemy wyrazy:

$$P(x) = -0,25x^2 + 2x - 3 + 0,5x^2 - 3x + 4$$

Grupowanie:

- x^2: $-0,25 + 0,5 = 0,25x^2$
- x: $2 - 3 = -1x$
- **Wyraz wolny**: $-3 + 4 = 1$

Ostateczny wzór wielomianu:

$$P(x) = 0,25x^2 - x + 1$$

.

Sprawdzenie poprawności:

- Dla $x = 2$: $0,25(4) - 2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$ (zgadza się z y_0).
- Dla $x = 4$: $0,25(16) - 4 + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$ (zgadza się z y_1).
- Dla $x = 6$: $0,25(36) - 6 + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$ (zgadza się z y_2).

.

1. Różnica w poleceniach (Co musisz zrobić?)

To najważniejsza różnica, bo determinuje moment, w którym możesz przestać liczyć:

- **Arkusz 1 (image_bfed40.jpg):** Polecenie brzmi: *"Przekształć macierz układu do postaci **diagonalnej**"*. To najbardziej pracochłonna wersja – musisz wyzerować liczby zarówno pod, jak i nad główną przekątną, aż po lewej stronie zostaną same jedynki.
- **Arkusz 2 (image_c14ada.png):** Polecenie brzmi: *"Rozwiąż układ metodą **eliminacji Gaussa**"*. Tutaj wystarczy doprowadzić macierz do postaci schodkowej (zera tylko pod przekątną), a resztę niewiadomych wyliczyć przez podstawianie wstecz.
- **Arkusz 3 (image_cdab65.jpg / image_cdae52.jpg):** Polecenie brzmi: *"Sprowadzić układ do postaci z **macierzą trójkątną górną**"*. To polecenie jest najbardziej konkretne – Twoim celem końcowym jest macierz, która ma zera pod przekątną. Nie musisz wyliczać końcowych wartości x, y, z, jeśli polecenie prosi tylko o postać macierzy.